CONCOURS INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION 1979

MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 4

Toutes les questions traitées doivent être référencées avec *précision.*
La présentation ainsi que la rigueur des raisonnements ont une importance fondamentale.

Les tables numériques sont utiles. Les parties A, B, C et D *sont strictement indépendantes.*

A. Les mathématiques financières utilisent constamment les suites arithmétiques et géométriques.

I

1° Soit la suite réelle définie par son 1er terme u_1, sa raison r et la relation $u_n = u_{n-1} + r$.

Établir l'expression de la somme $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

En déduire la somme $S_1(n)$ des n premiers entiers lorsque $u_1 = r = 1$.

2° Calculer la somme $S_2(n)$ des carrés des n premiers entiers soit, lorsque $u_1 = r = 1$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (u_k)^2.$$

3° Calculer la somme $S_3(n)$ des cubes des n premiers entiers soit, lorsque $u_1 = r = 1$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (u_k)^3.$$

4° Calculer les valeurs de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ lorsque $n = 30$.

II

1° Soit la suite réelle définie par son 1er terme v_1, sa raison q et la relation $v_n = v_{n-1} \times q$.

Établir l'expression de la somme $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} v_k$.

Étudier V_n lorsque $n \to +\infty$.

2° On pose $q = (1+i)^{-1}$ et $v_1 = a(1+i)^{-1}$ a et $i \in \mathbb{R}^+$. Donner en fonction de a, i et n l'expression particulière de V_n.

En considérant que $i \in]0,1[$ et que V_n est une fonction réelle de n, étudier les variations de cette fonction V_n.

III

1° On donne la suite w_n définie par $w_1 = (1+2i)$, son premier terme, et son terme courant :

$$w_k = k \times (1+2i)^{-2k+3}$$

.../...

Calculer la somme :

$$W_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k$$

2° On donne $i = 0{,}1$ et $n = 25$: calculer la valeur de W_n.

B. Le calcul des probabilités fait appel au dénombrement ou calcul combinatoire.

I

1° Établir le nombre de permutations différentes P_n que l'on peut réaliser avec n objets distincts.

Établir de même le nombre d'arrangements A_n^p de groupes ordonnés de p objets parmi n objets distincts disponibles ($p < n$).

Établir enfin le nombre de combinaisons C_n^p de groupes non ordonnés et différents de p objets parmi les n distincts disponibles ($p < n$).

2° Calculer les sommes $S_1 = C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2p+1} + \ldots$

et $S_2 = C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2p} + \ldots$

en précisant rigoureusement l'expression du dernier terme de S_1 et celle du dernier terme de S_2.

3° Démontrer que $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$ et en déduire la méthode dite du triangle de Pascal pour déterminer les coefficients du développement du binôme de Newton $(a + b)^n$.

Construire ce triangle des coefficients depuis $n = 0$ jusqu'à $n = 10$.

II

1° Dans une population supposée infinie, un caractère C peut être, pour chaque individu la constituant, ou positif ou négatif. C est positif pour la proportion $p = 0{,}6$ de la population et négatif pour la proportion $q = 0{,}4$.

On choisit n individus dans cette population et l'on convient d'attribuer à chacun une variable x_k prenant la valeur 1 si cet individu k a un caractère C positif et prenant la valeur 0 dans le cas contraire. On note X le nombre d'individus qui, parmi les n choisis, ont un caractère C positif.

Montrer que X s'exprime aisément en fonction des x_k.

2° Établir l'expression de la probabilité p_k pour que $X = k$.

3° Établir l'expression de l'espérance mathématique de X $\left(E(X) = \sum p_k x_k\right)$.

4° Sachant que $n = 10$ déterminer les probabilités pour que :

$X = 10$

$3 \leqslant X \leqslant 6$ et enfin $X < 2$

C.

I

On considère la matrice $M \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1° Calculer le déterminant $\Delta(M)$ de cette matrice.

2° Calculer les valeurs propres et donner pour la valeur propre de plus grand module une estimation de l'erreur.

3° Déterminer un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ (OXYZ) de vecteurs unitaires définis par leurs composantes dans $Oxyz$ qui sont vecteurs propres de M.

.../...

-3-

II

On considère (A) l'anneau non commutatif et unitaire des matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ 0 & a' & d \\ 0 & 0 & a'' \end{pmatrix}$$ dont les éléments sont réels ou complexes.

1° Montrer que la matrice A^{-1} de A appartient à l'anneau (A) lorsque A est régulière. On donnera explicitement la condition de régularité de A et l'expression de A^{-1}.

2° A quelle condition nécessaire la matrice A peut-elle être un diviseur de la matrice nulle de (A)?

3° Calculer A^2 et A^3.

4° Montrer qu'il existe 3 nombres réels ou complexes u, v, w tels que l'on ait :

$A^3 - u A^2 + v A + w E$ où E est la matrice unité de (A).

5° Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A en discutant les différents cas possibles.

6° Montrer que l'on peut déduire de 5° la relation du 4°

7° En supposant les valeurs propres de A distinctes deux à deux, diagonaliser A et en déduire sa transmuée A'.

8° En déduire les expressions A^n et A'^n.

D.

I

Calculer l'intégrale $I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n + 1) t}{\sin t} dt$ où n est entier $\geqslant 0$.

(On pourra calculer $I_{2n+1} - I_{2n-1}$)

2° Calculer l'intégrale $I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$.

3° Montrer que I_{2n} a une limite finie quand $n \to + \infty$.

II

1° Soit $\varphi(t)$ une fonction réelle de la variable réelle t continue sur $[a, b]$ et admettant une dérivée première $\varphi'(t)$ sur $[a, b]$. On suppose que $| \varphi'(t) | < M \ \forall t$ sur $[a, b]$, M étant indépendant de t. Soient α et β deux nombres tels que $a < \alpha < \beta < b$.

Montrer que si la suite des nombres réels $\varepsilon_n \to 0$ si $n \to + \infty$ l'intégrale $\int_\alpha^\beta [\varphi(t + \varepsilon_n) - \varphi(t)] dt$ tend vers 0 quand $n \to + \infty$.

2° Montrer que les intégrales $\int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos nt \, dt$ et $\int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin nt \, dt$ tendent vers 0 quand $n \to + \infty$.

(On peut poser $t = \frac{\pi}{n} + \theta$.)

3° Trouver la limite de I_{2n} si $n \to + \infty$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail